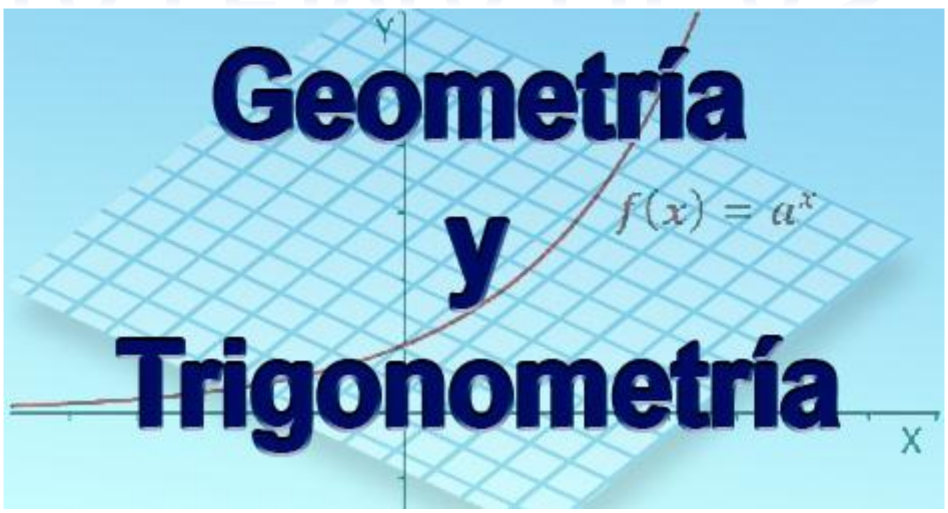
INSTITUTO DE NEGOCIOS E INNOVACIÓN

MATEMÁTICAS II



SEGUNDO SEMESTRE

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA Y CONCEPTOS ELEMENTALES

GEOMETRIA EUCLIDIANA

Definición y antecedentes

La geometría es una parte de las matemáticas que se encargas de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en el espacio. Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría apela a los denominados sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras.

La geometría es una de las ciencias más antiguas que existen en la actualidad pues sus orígenes ya se han establecido en que era el antiguo Egipto, debido a los trabajos de importantes figuras como Heródoto o Euclides, quienes desarrollaban estudios de áreas, volúmenes y longitudes.

En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron "*Los Elementos*", una colección de libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica. Su idea era partir de muy pocas suposiciones intuitivas y usar la lógica para deducir todo lo demás. No les bastaba que algo pareciera ser cierto, querían estar seguros y saber porque lo era.

Esta es la base de todas las matemáticas modernas. Los Elementos consisten de definiciones, nociones comunes y postulados (las cosas que se asumen como ciertas) seguidas por teoremas, construcciones y demostraciones.

Para el estudio de la geometría el ser humano utiliza la vista, instrumentos de medición, el dibujo y el razonamiento. A través de la vista podemos distinguir la forma y posición de las figuras geométricas y en algunos casos su tamaño; sin embargo, muchos hechos demuestran que no es suficiente el sentido de la vista para precisar la forma, posición y tamaño de la figura.

Conceptos básicos

Medir.- es un verbo que tiene origen del latín *«metiri»* y hace referencia al **acto de comparar una cantidad determinada de algo con una unidad de medida**, en donde se establece cuántas veces esta unidad ocupa un lugar dentro de dicha cantidad.

De igual forma medir consiste en determinar la longitud, volumen, extensión, o capacidad de una cosa por comparación con una unidad de medida establecida que es utilizada como referencia, usualmente **mediante algún instrumento graduado con dicha unidad**.

Unidad de medida

Por otro lado, dentro de lo que concierne al término medir, encontramos el concepto de unidad de medida. La unidad de medida es el **patrón a seguir para realizar la medición**. Debe cumplir ciertas condiciones, las cuales son:

- Una unidad debe de ser universal
- Una unidad debe ser de fácil reproducción
- Una unidad debe ser inalterable

Instrumentos de medida y medición

La regla graduada y el transportador, entre otros muchos más, se emplean para medir longitudes y ángulos. Pero toda medida es imperfecta, por lo cual no podemos asegurar que sea exacta, sino únicamente aproximada.

La aproximación de una medida depende de:

- La vista del observador.
- Calidad del instrumento de medición.
- Manejo apropiado del instrumento utilizado para medir.

En el dibujo existe mayor imperfección que en la medida, pues además de las limitaciones señaladas intervienen otros factores como:

- Pulso del dibujante.
- Punta del lápiz o pluma.
- Colocación del lápiz o pluma.
- Calidad del papel sobre el que se dibuja.
- Comodidad para realizar el dibujo.

El Razonamiento

El razonamiento es la capacidad que posee el hombre para asociar en forma debida, diversas ideas, observaciones o hechos, para obtener conclusiones correctas.

Todo proceso de pensar surge de algunos datos (hipótesis). A su vez, estos datos, mediante una correcta asociación de ideas, observaciones o hechos (razonamiento), conducen a establecer una nueva proposición (conclusión).

Las hipótesis y la conclusión son, respectivamente, los puntos de partida y llegada de todo razonamiento.

En matemáticas el razonamiento se utiliza para establecer la verdad de una proposición.

Proposiciones

Una proposición se formula con una oración gramatical, la cual forma un conjunto de palabras habladas o escritas de acuerdo con la sintaxis.

En cada oración se destaca un sujeto y un predicado. El sujeto es una expresión con la cual se nombra o designa un único objeto.

Las proposiciones en matemáticas se clasifican en: ***axiomas, postulados, definiciones, teoremas y corolarios.***

Axioma.- es una proposición evidente por si misma que no requiere demostración.

Postulados.- es una proposición cuya verdad se admite sin demostración, aunque no tiene la evidencia del axioma.

Ejemplos:

- Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta
- Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.
- Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.
- Todos los ángulos rectos son iguales.
- Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzaran de ese lado.

Definición.- es una proposición que implica una convención o descripción.

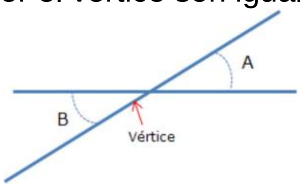
Ejemplos:

- Un *punto* es lo que no tiene partes.
- Una *línea* es una longitud sin anchura.
- Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Si dos rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman *rectos* y las líneas se llaman *perpendiculares*.
- *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.

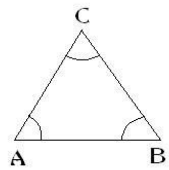
Teorema.- es una proposición que requiere demostración.

Ejemplos:

- Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.



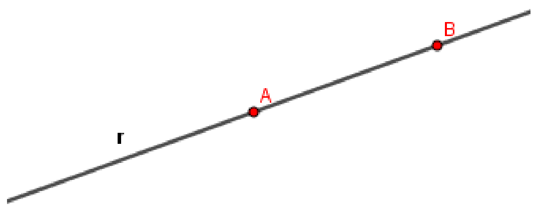
- En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.



Corolario.- es una proposición que es consecuencia de otra y cuya demostración requiere de un ligero razonamiento.

Ejemplo:

La proposición "dos puntos determinan una recta" es corolario del postulado: "por dos puntos dados puede hacerse pasar una recta y solo una".

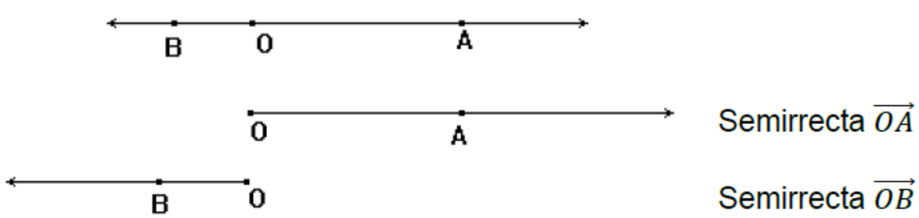


A partir de este ejemplo podemos definir algunos conceptos como son:

Punto.- Es un término no definido en geometría. La huella que deja un alfiler en una hoja nos da la idea de punto. Los puntos los denominaremos por letras mayúsculas.

Recta.- Es otro término no definido en geometría.

Semirrecta.- Si en una recta, se da un punto O, este parte la recta en dos semirrectas de origen O. Una semirrecta es el conjunto formado por O y todos los puntos que le siguen, o el conjunto formado por O y todos los puntos que le anteceden.



Postulados de orden sobre puntos.- Se dice que existen al menos dos puntos sobre una recta

- Si A y B son dos puntos distintos sobre una recta existe por lo menos un punto C entre A y B.
-

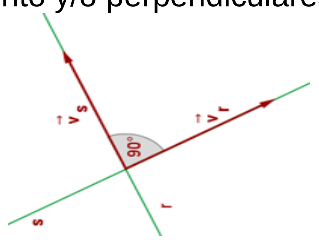
Puntos colineales.- Son los puntos que están sobre una misma recta.

Segmento de recta.- Dados dos puntos distintos A y B de una recta, el conjunto formado por A y B y todos los puntos entre A y B se llama segmento de recta AB y se denota por AB.

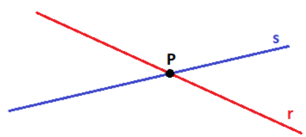
Posiciones relativas de dos rectas en un plano

Dadas dos rectas en un plano puede suceder:

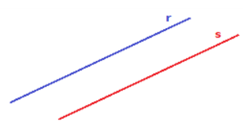
- Que se cortan en un punto y/o perpendiculares.



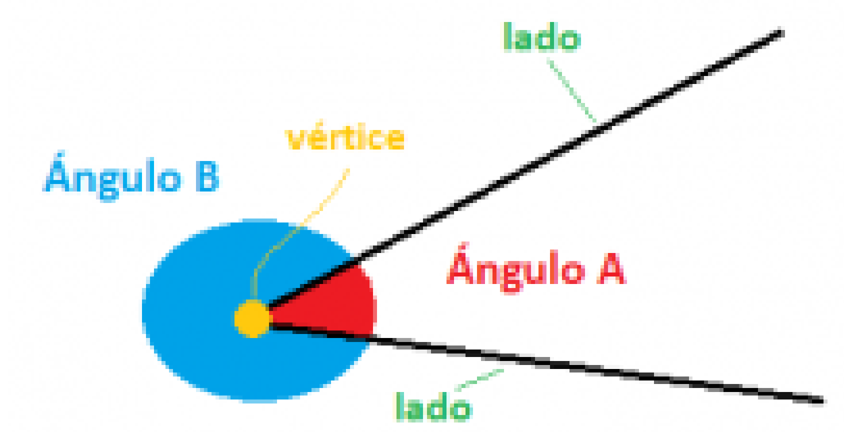
- Que coincidan o sea que su intersección sea una de las rectas.



- Que sean paralelas.



ÁNGULOS



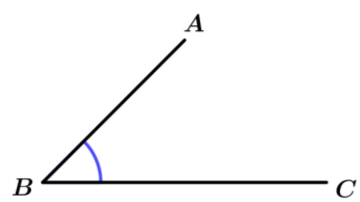
ÁNGULO

Conceptos

- Ángulo es la abertura que forma un plano de dos semirrectas unidas en un punto llamado vértice, cuando una de ellas tiende a girar sobre uno de los extremos.
- Un ángulo es la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen.

- El **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos rectas que se unen en un mismo punto llamado origen. Los ángulos se calculan siempre en sentido contrario a las agujas del reloj.

Para designar un ángulo habitualmente se usan letras mayúsculas que se colocan en los lados y en el vértice y se lee, sea el Angulo ABC.



Sistemas de unidades empleadas para medir ángulos

El concepto de ángulo, entonces, hace referencia a **una magnitud que puede ser analizada y comparada con otras**, por lo que existen operaciones entre ellos. Para eso, la medición de los ángulos se hace en grados, minutos, y segundos. Los primeros (representados con el signo °) equivalen a 60 de los segundos (representados con ’), que a su vez equivalen a 60 de los terceros (representados con ’’).

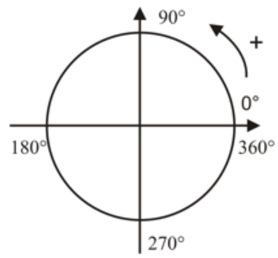
La cantidad de grados podrá ascender hasta 360, que es considerado el giro completo. Por poner un ejemplo cotidiano que ejemplifique esto, podemos ver el reloj de agujas: constantemente las agujas están formando ángulos. A las 12 en punto, cuando las dos agujas apuntan exactamente para el mismo lado, el ángulo es de 0°. A las 3 pasa a ser de 90°, a las 6 de 180°, a las 9 de 270°, y en el giro de las 12 de nuevo serán los 360°, y volverá a empezar.

- **Sistema Sexagesimal**

Los **grados sexagesimales** dividen una circunferencia en 360 partes iguales, de manera que una vuelta a la misma son 360º. 360º Su símbolo es °.

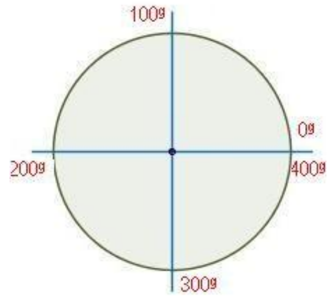
Un ángulo recto son 90º (90 grados sexagesimales). Cada grado sexagesimal se divide en 60 minutos (su símbolo es ‘) y cada minuto sexagesimal se divide en 60 segundos (su símbolo es ”).

Por ejemplo, podríamos escribir un ángulo sexagesimal como 87º 31' 44". También cabe expresar los grados sexagesimales con notación decimal.



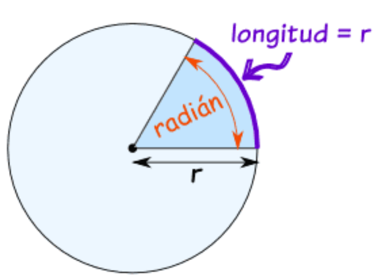
- **Sistema Centesimal**

Otro sistema para medir los ángulos son los **grados centesimales** (o los **gradianes**). Divide una circunferencia en 400 partes iguales. Su símbolo es ^{g}. Un ángulo recto mide 100^{g}.
Cada **grado centesimal** se divide en **100 minutos centesimales**. Su símbolo es ^{m}. A su vez, cada minuto centesimal se divide en **100 segundos centesimales**. (Su símbolo es ^{s}).
Igualmente, podríamos escribir un ángulo centesimal como $87^{g}\ 31^{m}\ 44^{s}$. En este caso, su expresión decimal sería directamente $87{,}3144^{g}$.



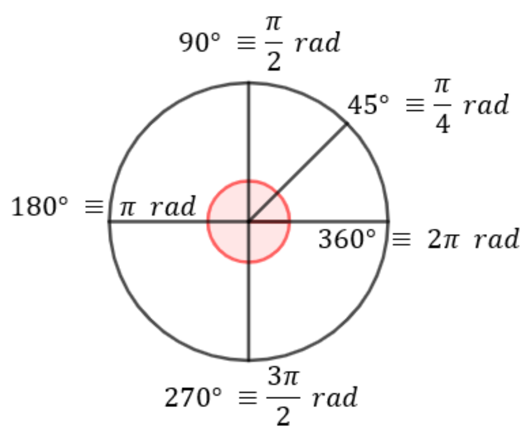
- **Sistema Cíclico**

Es un sistema también llamado circular, al igual que los anteriores tiene como base la división del círculo. Este sistema se forma y define partiendo de la circunferencia señalando un arco de longitud igual a su radio, trazando el otro radio, quedando la circunferencia con dos radios, a lo que comúnmente le llamamos radian.



El **radián** es una unidad de medida del Sistema Internacional de Unidades. Es el ángulo de la circunferencia que abarca un arco de longitud igual al radio de la misma. Su símbolo es rad.
La **magnitud de un radián** sería la de la longitud del arco que delimitan las dos rectas de dicho ángulo si estuviésemos en una circunferencia de radio 1.
Ángulo en radianes = longitud del arco / radio

Una vuelta entera a una circunferencia es 2π radianes.



Equivalencia entre radián, grado sexagesimal y grado centesimal

Sabiendo que una vuelta a la circunferencia son 360º grados sexagesimales, 400^g grados centesimales o 2π radianes, podemos saber la relación entre estas tres unidades:

	Radianes	Sexagesimales	Centesimales
Radianes	$1\ rad$	$1\ rad = 57^\circ\ 17'\ 44''$	$1\ rad = 63^g\ 66^m\ 20^s$
Sexagesimales	$1^\circ = 0{,}0175\ rad$	1°	$1^\circ = 1^g\ 11^m\ 11^s$
Centesimales	$1^g = 0{,}0157\ rad$	1^g	$1^g = 0{,}9^\circ$

Equivalencias de algunos ángulos notables:

Sexagesimales	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Centesimales	0^g	50^g	100^g	150^g	200^g	250^g	300^g	350^g	400^g
Radianes	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π

Relación entre radianes y grados sexagesimales:

Conocemos que la longitud de una circunferencia es de 2π veces el radio, por lo cual aceptamos que subtiende un ángulo central de 2π radianes; además como la circunferencia también subtiende un ángulo central de 360°, entonces tenemos:

2π radianes = 360°

π radianes = 360°/2; entonces, π = 180°

En base a lo anterior se deduce que:

$$Radianes = \frac{Grados \cdot \pi}{180}$$

$$Grados = \frac{Radianes \cdot 180}{\pi}$$

Ejemplos de conversiones de Grados a Radianes y de Radianes a Grados:

- **135º a radianes**

$$\text{rad} = 135^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) = \frac{135^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{27}{36}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

- $\frac{1}{5}\pi$ **a grados**

$$\text{grados} = \left(\frac{1}{5}\pi\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

- **210º a radianes**

$$\text{rad} = 210^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) = \frac{210^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{7}{6}\pi$$

Ejercicios:

1) Convierte las siguientes medidas de grados a radianes:

a) 45º b) 90º c) 180º d) 270º e) 720º f) 315º

g) -30º h) 210º i) 20º j) 100º k) 150º l) 60º

m) 50º n) 120º ñ) 320º o) 350º p) 280º q) 340º

2) Convierte las siguientes medidas de radianes a grados:

a) π rad b) 3π rad c) π/4 rad d) 2π/3 rad e) 3π/4 rad

f) π/6 rad g) 2π/5 rad h) π/2 rad i) 2π rad j) 3π/2 rad k) 8π rad l) π/5 rad

m) π/9 rad n) 2π/9 rad ñ) 3π/5 rad o) π/10 rad p) 6π/9 rad q) 200π rad

Conversión de grados (°), minutos (´) y segundos (“) a Grados (°)

b) $3^\circ\ 8'\ 3''$

$$23^\circ\ 18'\ 30'' = 3^\circ + \left(\frac{8}{60}\right)^\circ + \left(\frac{3}{3600}\right)^\circ = 3.134^\circ$$

c) $200^\circ\ 25''$

$$200^\circ\ 25'' = 200^\circ + \left(\frac{25}{3600}\right)^\circ = 200.007^\circ$$

d) $23^\circ\ 18'$

$$23^\circ\ 18' = 23^\circ + \left(\frac{18}{60}\right)^\circ = 23.3^\circ$$

Ejemplo

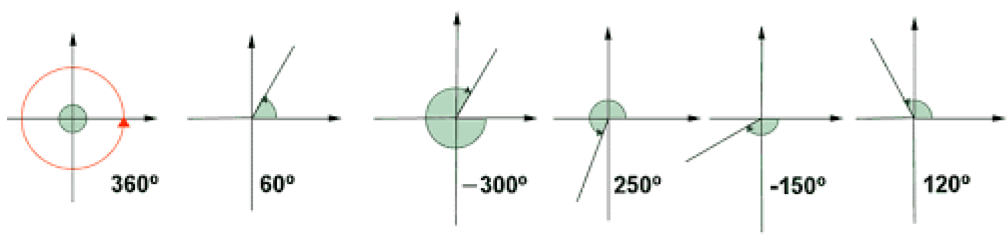
b. Convertir 34.817° a grados, minutos y segundo.

$$
\begin{aligned}
34.817° &= 34° + .817° \\
&= 34° + (.817)(60') && 1° = 60' \\
&= 34° + 49.02' \\
&= 34° + 49' + 02' \\
&= 34° + 49' + (.02)(60'') && 1' = 60'' \\
&= 34° + 49' + 1.2'' \\
&= 34°\ 49'\ 1.2''
\end{aligned}
$$

Clasificación de ángulos

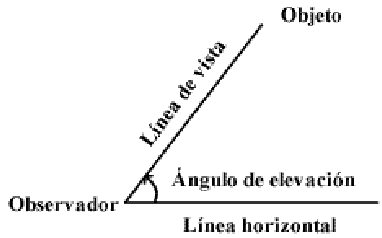
Un ángulo se genera cuando una de las semirrectas unidas a un punto llamado vértice tiende a girar sobre uno de los extremos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, hasta formar un ángulo de 360°. Este tipo de ángulos se estudia en la geometría.

Ejemplos:

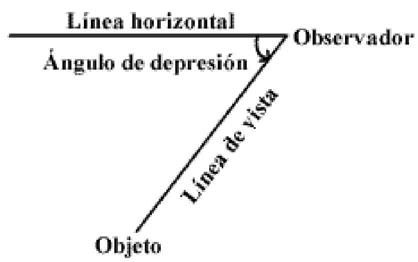


En trigonometría también se utilizan los siguientes conceptos:

Angulo de elevación.- es aquel ángulo formado por la horizontal que pasa por el ojo del observador y el rayo determinado por la vista dirigida hacia un punto que está por encima del observador.



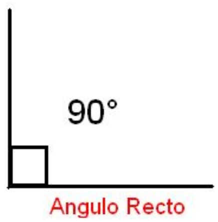
Angulo de depresión.- Es aquel ángulo formado por horizontal que pasa por el ojo del observador y el rayo determinado por la vista dirigida hacia un punto que está por debajo del observador.

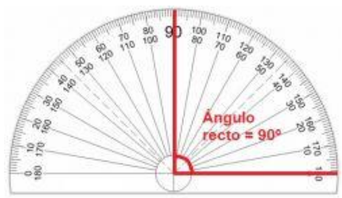


Clasificación de los ángulos

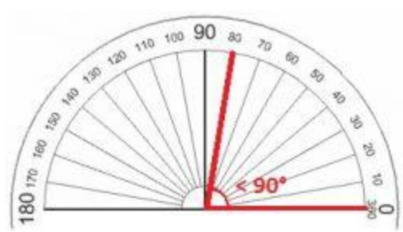
Por su magnitud pueden ser:

Ángulo Recto.- Un ángulo es recto si mide 90º y habitualmente se distingue con un rectángulo pequeño en el vértice.

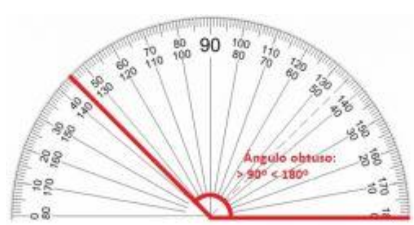




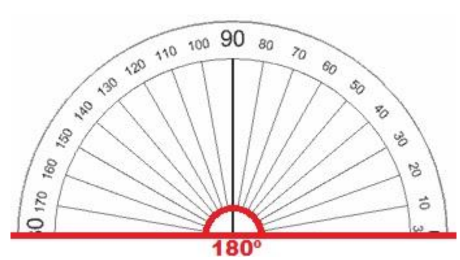
Ángulo Agudo.- Es aquel ángulo que mide menos de 90º.



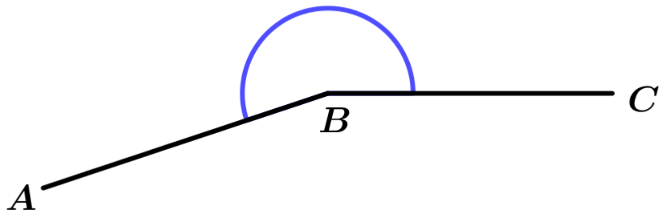
Ángulo Obtuso.- Es aquel ángulo que mide más de 90º



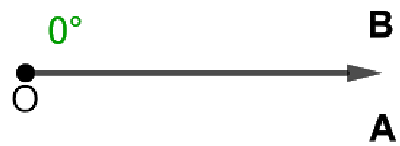
Ángulo Llano.- Es aquel ángulo que mide 180°



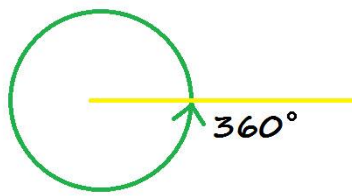
Ángulo Entrante.- Es aquel ángulo que mide más de 180° son llegar a los 360°.



Ángulo Nulo.- que es aquel que mide 0°.



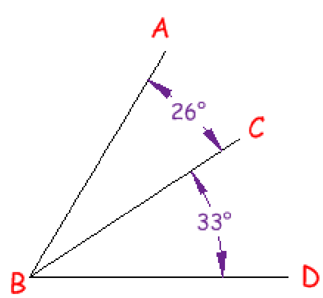
Perígono.- Es aquel que mide 360°.



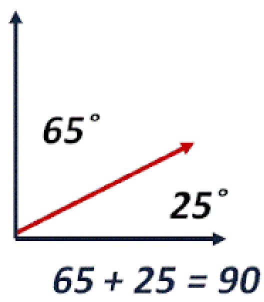
Clasificación de los ángulos

Por su posición pueden ser:

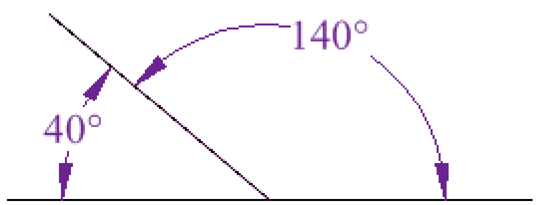
Ángulos Adyacentes o consecutivos.- son aquellos que ángulos que tienen un lado en común y están en un mismo plano.



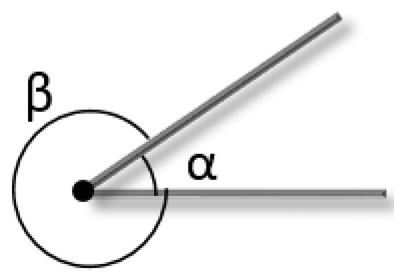
Ángulos Complementarios.- son aquellos ángulos consecutivos que juntos suman 90°.



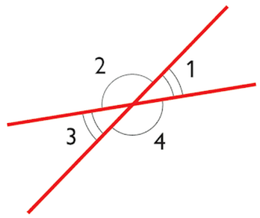
Ángulos Suplementarios.- son aquellos ángulos consecutivos que juntos suman 180°.



Ángulos Conjugados.- son aquellos ángulos consecutivos que juntos suman 360°.

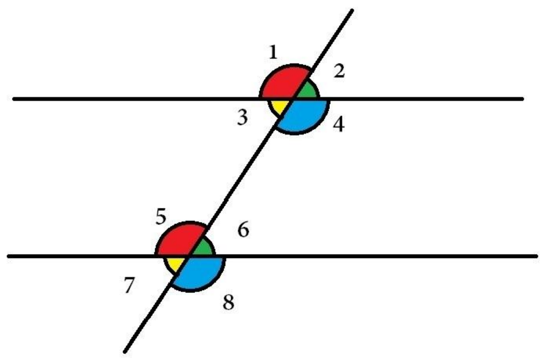


Ángulos Adyacentes y Opuestos por el Vértice.- se forman cuando dos rectas se cruzan en un punto, formando cuatro ángulos que se acuerdo con su posición reciben este nombre. Los pares de ángulos consecutivos se llaman ángulos adyacentes y su suma es de 180°, o sea que forman un ángulo llano; además, son suplementarios.



Nota: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

Ángulos formados por dos rectas y una transversal.- las paralelas y la transversal forman ocho ángulos, de los cuales cuatro son ***internos*** por estar situados en el espacio comprendido entre las paralelas; los otros cuatro son ***externos*** porque están situados fuera de ese espacio.



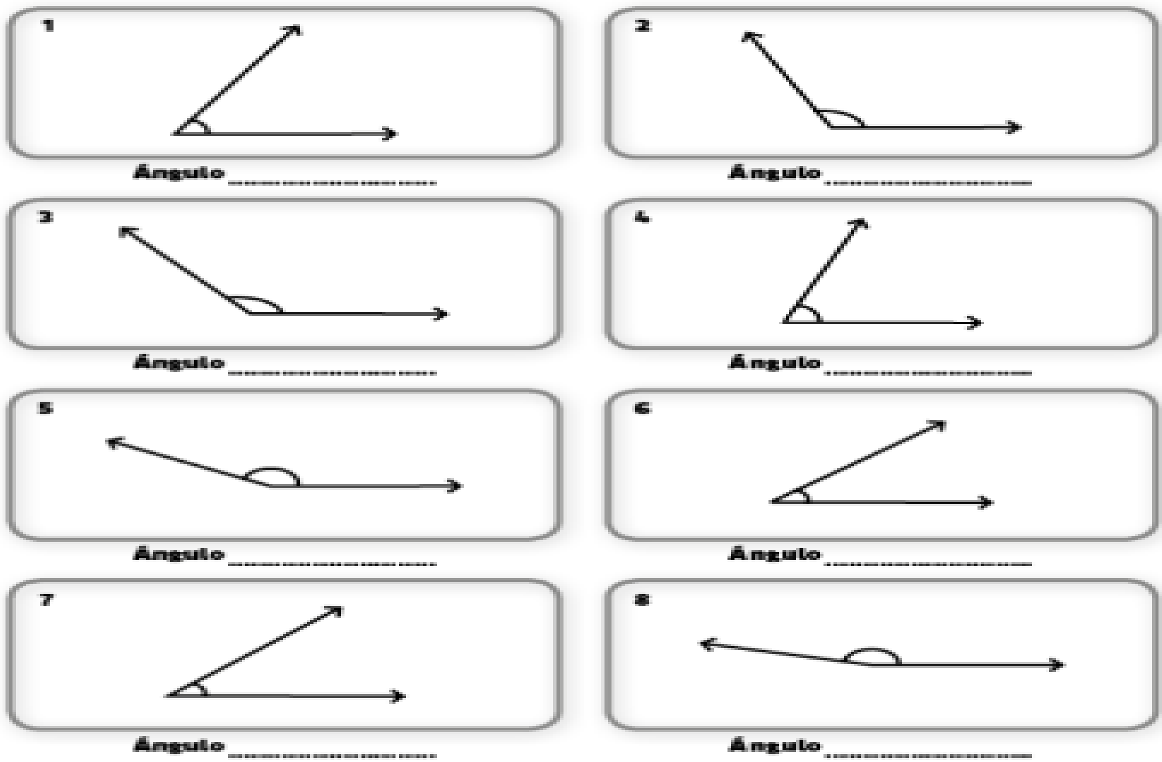
Ángulos alternos internos: son los que están entre las líneas paralelas y a distinto lado de la secante. son los ángulos 4y5 y 3y6 del dibujo. Cada pareja de ángulos tiene la misma medida.

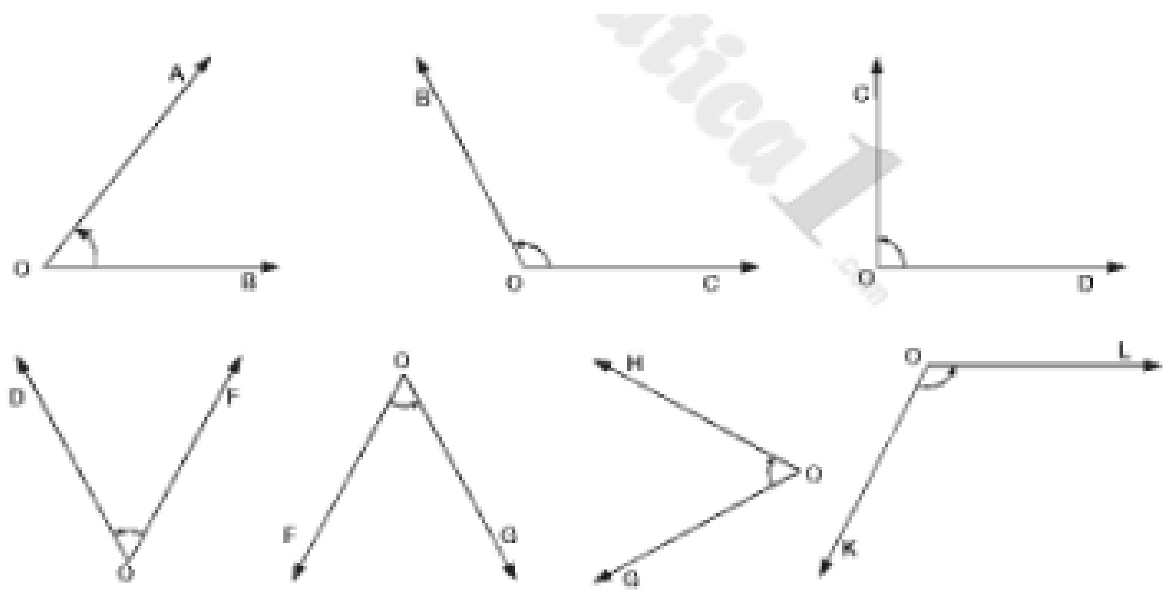
Ángulos alternos externos: igual que los anteriores pero en la parte externa de las paralelas. Son los ángulos 1y8 y 2y7.

Ángulos correspondientes: son los que se encuentran en el mismo lado de las paralelas y de la secante. En el dibujo serían 1y5, 3y7, 2y6, 4y8.

Ejercicios:

Utilizando un transportador mida los siguientes ángulos y coloque el tipo de ángulo que es según su clasificación:

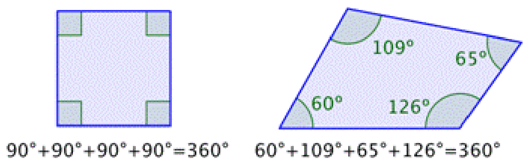




CUADRILÁTEROS
POLÍGONOS

CUADRILÁTERO: Los polígonos limitados por cuatro lados y que además forman entre sí cuatro ángulos, se denominan "**Cuadriláteros**".

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados y la suma de sus ángulos interiores es igual a 360°.



Propiedades de los cuadriláteros.

a) Los "**LADOS OPUESTOS**" son iguales y que no tienen ningún vértice en común.

b) Los "**LADOS CONSECUTIVOS**" son los que tienen un vértice en

c) Los "**VÉRTICES Y ÁNGULOS OPUESTOS**" son los que no pertenecen a un mismo lado, siendo los ángulos iguales.

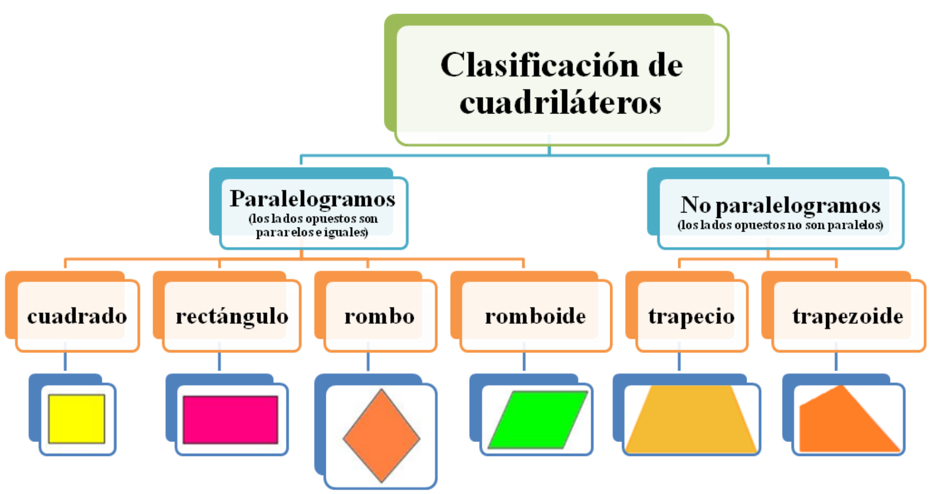
d) La "**SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES**" es igual a cuatro rectos (360°).

e) Los "**ÁNGULOS ADYACENTES**" a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180°.

f) Las "**DIAGONALES**" se cortan en su punto medio.

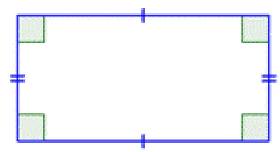
g) El "**NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES**" que pueden trazarse siempre son dos y que se cortan en un punto interior.

h) Desde un Vértice solo puede trazarse una "**DIAGONAL**".



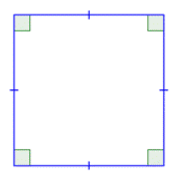
Paralelogramos.- Son los cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos. Si los lados opuestos son paralelos entre sí, se les denomina “**Paralelogramos**”.

1.- Rectángulo.- es un paralelogramo porque sus pares de lados opuestos son paralelos, Un rectángulo también tiene la característica especial de que todos sus ángulos son rectos; los cuatro ángulos son congruentes.

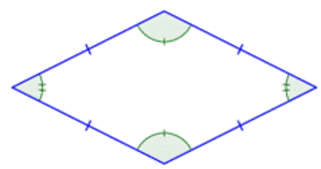


2.- Cuadrado.- es una de las figuras geométricas básicas, siendo un caso especial de un paralelogramo que tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos congruentes.

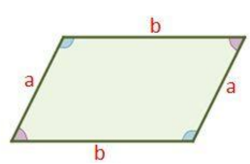
Un cuadrado es también un rectángulo porque tiene dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos. Un cuadrado también es un paralelogramo porque sus lados opuestos son paralelos.



3.- Rombo.- es una figura geométrica que se caracteriza por presentar los cuatro lados congruentes, Sus propiedades incluyen que cada par de lados opuestos son paralelos, por lo que también es un paralelogramo.



4.- Romboides.- Es el paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales, es decir, solamente sus lados opuestos son iguales y sus ángulos son oblicuos.

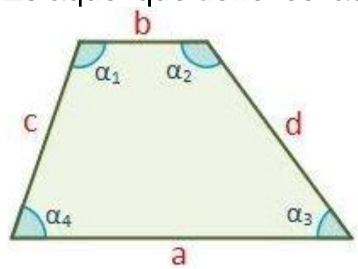


Resumiendo, todos los cuadrados son rectángulos, pero no todos los rectángulos son cuadrados. Todos los rectángulos son paralelogramos, pero no todos los paralelogramos son rectángulos. Y *todas* estas figuras son cuadriláteros.

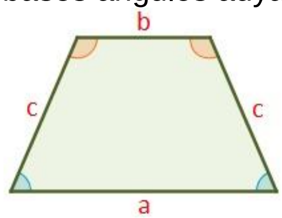
El diagrama siguiente ilustra la relación entre los diferentes tipos de cuadriláteros.

Si únicamente dos de sus lados opuestos son paralelos, es decir, los que se llaman “Bases” y los otros dos no, se denominan “TRAPECIOS”

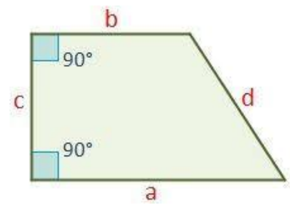
- **Trapecio Escaleno**.- Es aquel que tiene los lados no paralelos desiguales.



- **Trapecio Isósceles**.- Es aquel que tiene sus lados no paralelos de igual longitud, formando con las bases ángulos adyacentes iguales.

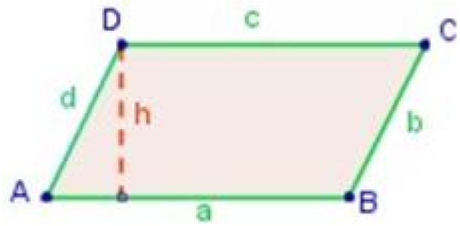


- **Trapecio Rectángulo**.- Es aquel que tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base.



Área del romboide

El **área** del **romboide** se obtiene multiplicando la **base por altura**.



En este caso, si tomamos como base el lado **a** , tenemos;

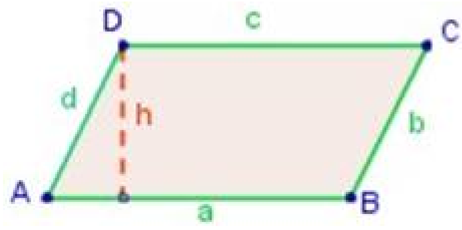
$$A = a \cdot h$$

Perímetro del romboide

El **perímetro del romboide** es igual a la **suma** de las **longitudes** de sus **cuatro lados.**

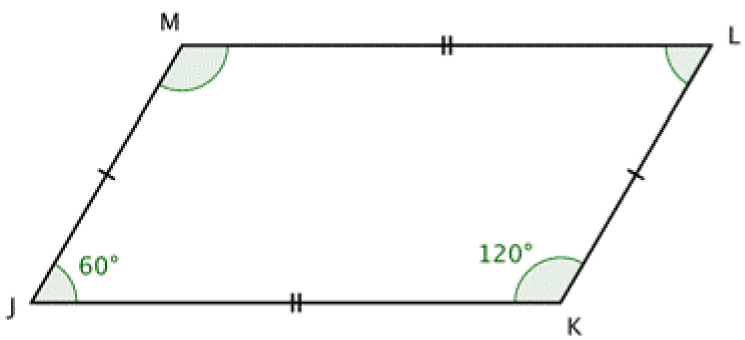
P = 2 · a + 2 · b

P = 2 · (a + b)

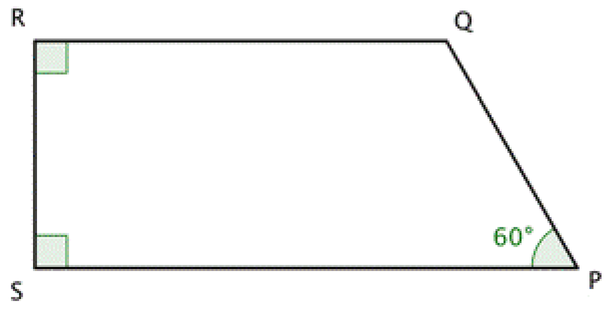


Ejercicios:

Problema **Determinar las medidas de $\angle M$ y $\angle L$.**



Problema **Encuentra la medida de $\angle Q$.**



Problema

Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero si sus lados valen, respectivamente x, 1.5x, 2x, 1.5x.

La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 grados.

$x+1.5x+2x+1.5x=360$

$6x = 360$

$x = 360/6 = 60$
Por lo que los ángulos miden: 60, 90, 120 y 90 grados

Ejercicio

Dibuja un trapecio con base mayor 6cm, altura 3 cm, angulo agudo adyacente a la base de 35°.

Calcular el valor de x y de y, en un romboide si su perímetros es de 28 cm.

El romboide es un paralelogramo con la propiedad de que sus lados enfrentados son iguales. De ahí ya se puede deducir la primera ecuación igualando el valor de los lados horizontales:

$3x = 2y - 2$ pasó las variables al mismo lado...

$3x - 2y = -2$

El otro lado que vale "2x" es igual a su paralelo, por lo tanto entre los dos medirán $2x+2x = 4x$ y sumándole los otros dos tendremos el perímetro. De ahí sale la otra ecuación:

$4x + 3x + 2y - 2 = 28$ ... y reduzco términos semejantes...

$7x + 2y = 30$

Ahora usaré el método de reducción para resolver:

$3x - 2y = -2$
$\underline{7x + 2y = 30}$

$10x \quad = 28$

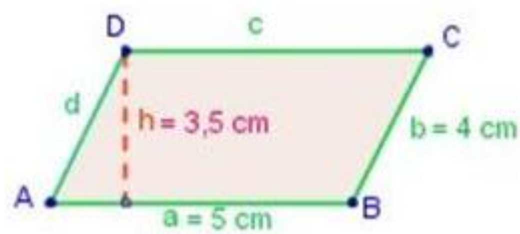
x = 2.8

Sustituyo ese valor en la segunda ecuación...

7(2.8) + 2y = 30

2y = 30 – 19.6
y = 5.2

Calcule el área y el perímetro del Romboide que a continuación se ilustra:

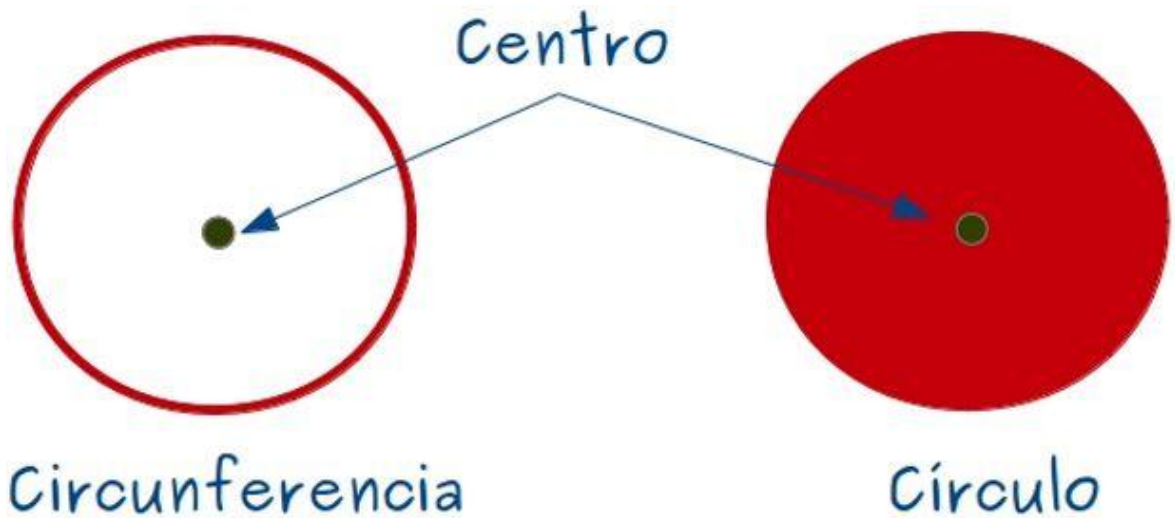


A = a . h

A = 5 · 3,5 = 17,5 cm2

P = 2 · (5 + 4) = 18 cm

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO



Circunferencia

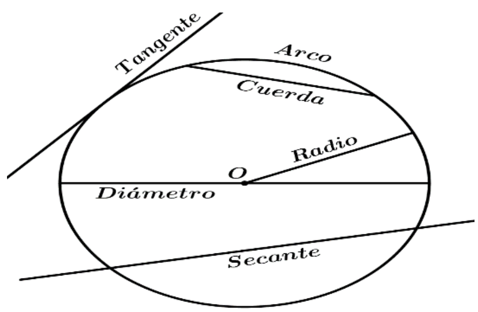
La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana, cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro punto, llamado centro.

Un **círculo** es una superficie plana limitada por una línea curva (circunferencia).

A menudo se utiliza indistintamente **círculo** y **circunferencia** para nombrar la misma cosa, pero esto no es correcto. Circunferencia es una curva geométrica plana, cerrada, cuyos **puntos son equidistantes** (están a la misma distancia) del centro, y sólo posee longitud de la circunferencia, es decir, el perímetro del círculo.

El círculo, al ser una **figura plana** (todos sus puntos están contenidos en un solo plano) tiene dos dimensiones y por lo tanto tiene área.

Elementos de una circunferencia.



Centro: punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia.

Radio: segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de la misma.

Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia, el radio es perpendicular a la cuerda en su punto medio.

Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro. Es la cuerda que mayor tamaño tiene.

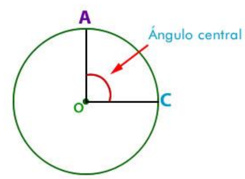
Arco: es la porción de circunferencia limitada por dos puntos de la misma, también se puede decir que es cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia.

Secante: Recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos.

Tangente: Recta que intersecta con la circunferencia en un punto.

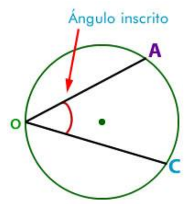
Ángulos de la circunferencia.

- **Ángulo central.-** Es el ángulo que tiene su vértice en el centro y sus lados lo forman dos radios.



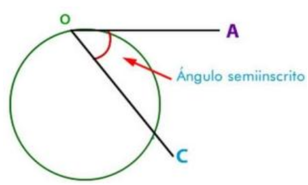
- Si dos ángulos centrales son iguales también lo son los arcos correspondientes.
- La medida de un arco central es la misma que la de su ángulo central correspondiente.

- **Ángulo inscrito.-** Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.



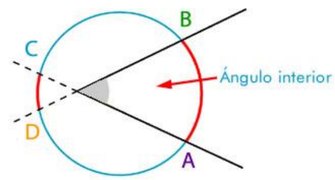
-La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que abarca.

- **Ángulo semi-inscrito.-** Es aquel que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y un lado es tangente y el otro secante a ella.



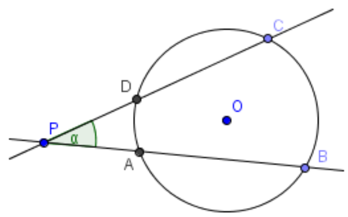
- La medida de un ángulo semi-inscrito es la mitad del arco que abarca.

- **Ángulo interior.-** Es aquel que tiene su vértice en un punto interior del círculo. Sus lados con cuerdas de la circunferencia.



-Un ángulo interior mide la mitad de la suma de las medias de sus arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de los mismos.

- **Ángulo exterior.-** Es aquel que tiene su vértice en un punto fuera de la circunferencia y del circulo y su lados son secantes o tangentes de la circunferencia.



- La medida de un ángulo exterior es la mitad de la diferencia de los arcos que abarca el ángulo.

Perímetro y Área

El **perímetro de la circunferencia** es la longitud que mide ésta y se calcula multiplicando el radio por π y por 2:

$$Perímetro = 2.\pi.r$$

Donde r es el radio de la circunferencia.

El diámetro es dos veces el radio, podemos expresar el radio en función del diámetro:

$$D = 2.r \;\rightarrow\; r = \frac{D}{2}$$

Y por tanto, también podemos calcular el perímetro de la circunferencia, si conocemos su diámetro con la siguiente fórmula:

$$Perímetro = 2.\pi.\frac{D}{2} = \pi.D$$

Donde D es el diámetro de la circunferencia.

Nota: La circunferencia no tiene área.

El área que hay dentro de la circunferencia es el círculo. Por tanto, cuando se habla de área de la circunferencia, lo que realmente se quiere decir es el área del círculo.

Calcular el perímetro de un círculo

El perímetro del círculo es una circunferencia, por lo que calcular el perímetro del círculo y el perímetro de la circunferencia es exactamente lo mismo y por tanto se utilizan las mismas fórmulas:

$$Perímetro = 2.\pi.r$$

$$Perímetro = 2.\pi.\frac{D}{2} = \pi.D$$

Para calcular el área del círculo debemos conocer su radio o su diámetro.

Se calcula multiplicando π por el radio al cuadrado:

$$\acute{A}rea = \pi . r^2$$

Donde r es el radio del círculo.

También podemos calcular el área de un círculo en función de su diámetro.

Ya sabemos que el radio se puede expresar como el diámetro partido por dos:

$$D = 2.r \rightarrow r = \frac{D}{2}$$

Si sustituimos esta expresión del radio en la fórmula del área del círculo, obtenemos la fórmula en función del diámetro:

$$\acute{A}rea = \pi . \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi . \frac{D^2}{4}$$

Donde D es el diámetro del círculo.

Ejercicios sobre área y perímetro del círculo

Resolver ejercicios sobre calcular el área y el perímetro de un círculo aplicando las fórmulas anteriores.

En general, hay que tener mucho cuidado con las unidades de las longitudes y expresar siempre el resultado con sus unidades correspondientes.

Ejercicio 1

Calcula el área de un círculo cuyo radio es igual a 20 cm.

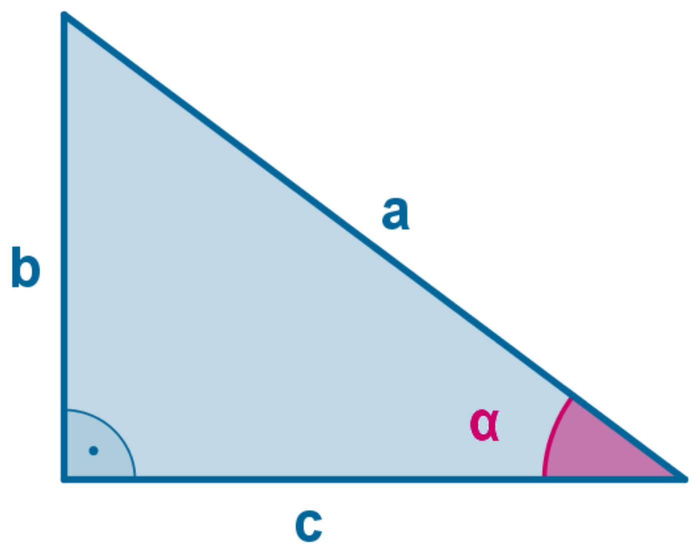
Ejercicio 2

Calcula el perímetro de un círculo sabiendo que su diámetro es de 2 m.

Ejercicio 3

El área de un círculo es de 25 cm^2. ¿Cuánto mide su perímetro?

TRIÁNGULOS
(*polígonos*)



Polígono

Se entiende por polígono aquella forma geométrica que esté compuesta por muchos lados, pudiendo estar los mismos dispuestos de manera regular o irregular. La palabra polígono proviene del griego y significa "muchos ángulos". Los polígonos son formas planas que son, además, cerradas y que normalmente tienen a partir de tres lados en adelante (siendo los triángulos o los cuadrados diferentes tipos de polígonos).

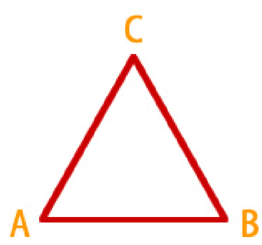
Triángulo

El **triángulo** es un **polígono de tres lados que da origen a tres vértices y tres ángulos internos**. Es la figura más simple, después de la recta en la geometría. Como norma general un triángulo se representa con tres letras mayúsculas de los vértices (ABC). Los triángulos son las figuras geométricas más importantes, ya que cualquier **polígono** con un número mayor de lados puede reducirse a una sucesión de triángulos, trazando todas las diagonales a partir de un vértice, o uniendo todos sus vértices con un punto interior del polígono.

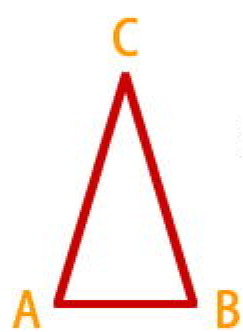
Clasificación de los triángulos

Clasificación por la magnitud de sus lados.

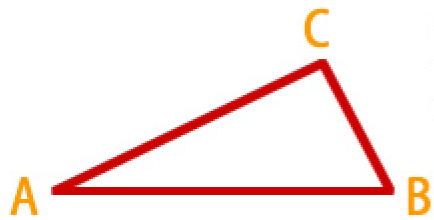
a) **Equilátero.-** Son aquellos que poseen sus tres lados con la misma magnitud.



b) **Isósceles.-** Son aquellos que poseen dos de sus lados con la misma magnitud y otro con diferente magnitud.

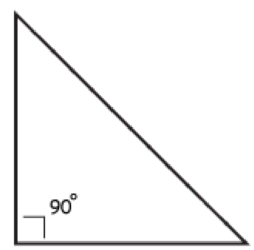


c) **Escaleno**.- Son aquellos triángulos que poseen sus tres lados con diferente magnitud.



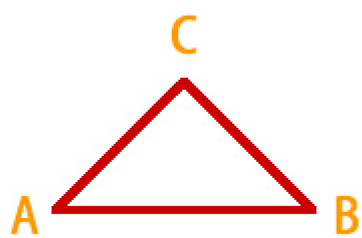
Clasificación por la magnitud de sus ángulos.

a) **Rectángulo**.- Son aquellos triángulos donde uno de sus ángulos es recto (igual a 90°), acostumbrándose a colocar un pequeño cuadro representando este ángulo.

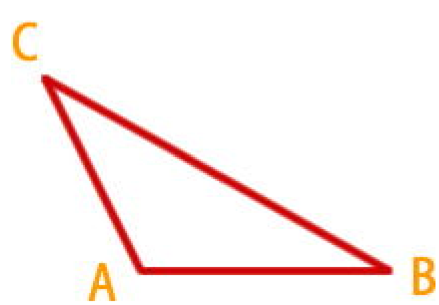


b) **Oblicuángulos**.- Son aquellos triángulos que no tienen ningún ángulo recto y pueden ser de dos tipos:

- **Acutángulo**.- Son aquellos que tienen sus tres lados agudos.



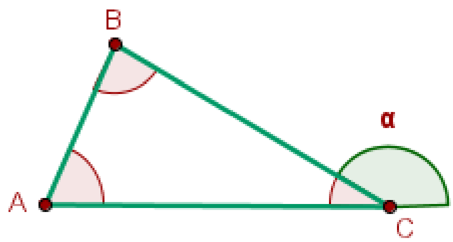
- **Obtusángulo**.- Son aquellos triángulos que presentan un ángulo obtuso.



Propiedades generales de los triángulos

Teorema 1. En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180°.

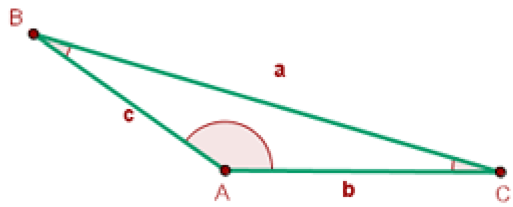
$$A + B + C = 180°$$



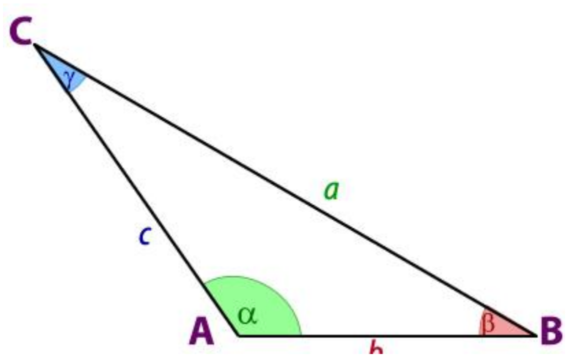
Teorema 2. El valor de un **ángulo exterior** de un **triángulo** es igual a la **suma** de los **dos interiores no adyacentes**.

$$\alpha = A + B$$

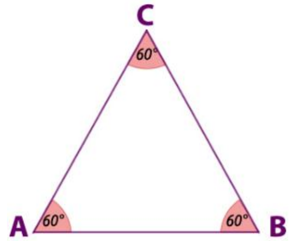
$$\alpha = 180° - C$$



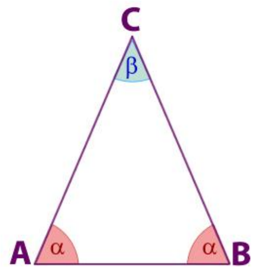
Teorema 3. En un triángulo, al lado de mayor longitud se le opone el ángulo de mayor medida y viceversa.



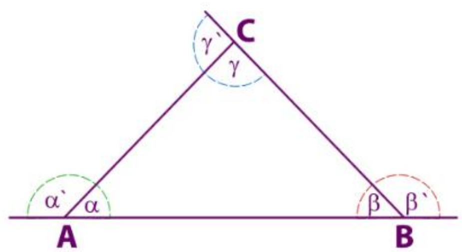
Teorema 4. En un triángulo, **a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.**



Teorema 5. En un triángulo isósceles, los ángulos basales son congruentes.

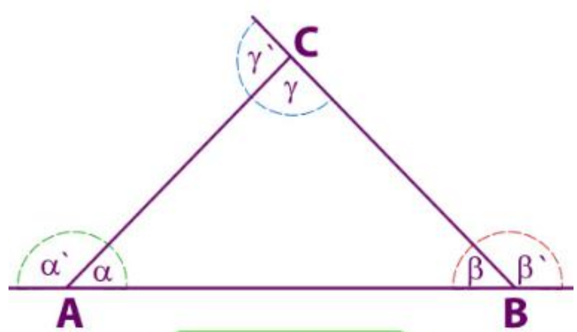


Teorema de la suma de las medidas de los ángulos exteriores. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.



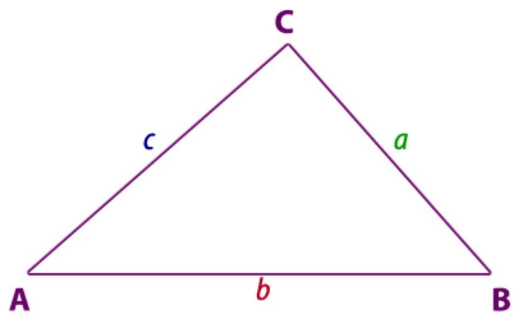
$$\alpha` + \beta` + \gamma` = 360°$$

Teorema del ángulo exterior. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.



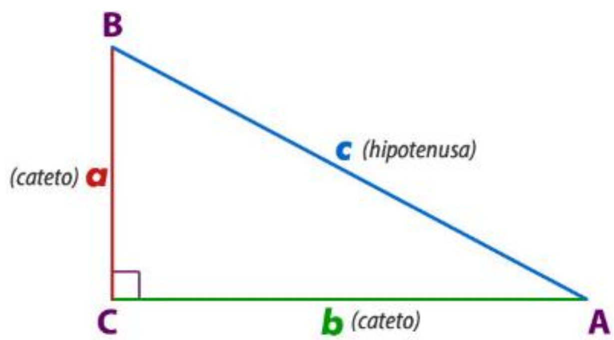
$$\alpha` = \beta + \gamma$$
$$\beta` = \alpha + \gamma$$
$$\gamma` = \alpha + \beta$$

Teorema de la desigualdad triangular. Un lado de un triángulo siempre es menor que la suma de los otros dos (condición de existencia de un triángulo dados sus lados).



$a < b + c \; ; \; a > b - c$

Teorema particular de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.



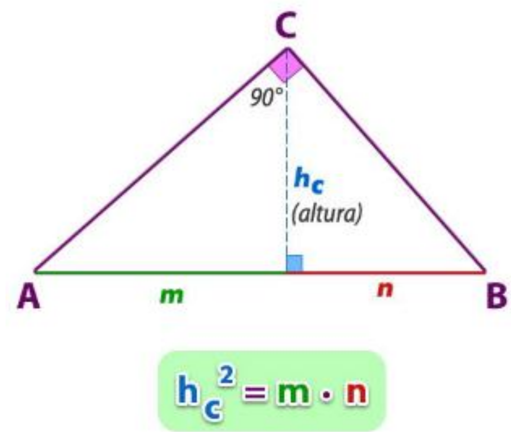
$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}^2 + \text{Cateto}^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

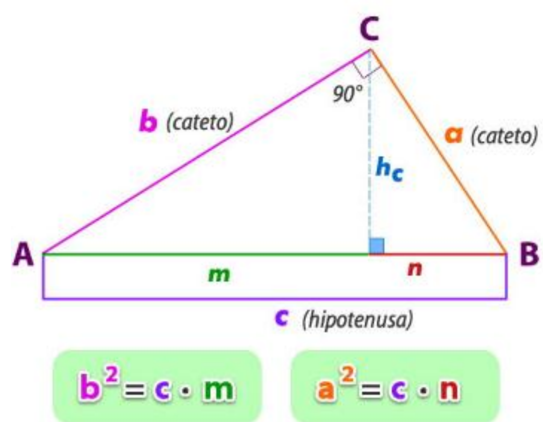
Teorema de Euclides

En todo triángulo rectángulo:

a) El cuadrado de la medida de la altura respecto de la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

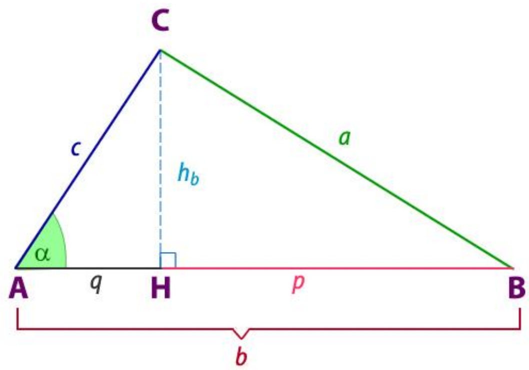


b) El cuadrado de la medida de uno de los catetos es igual al producto de su proyección sobre la hipotenusa y la medida de la hipotenusa completa.



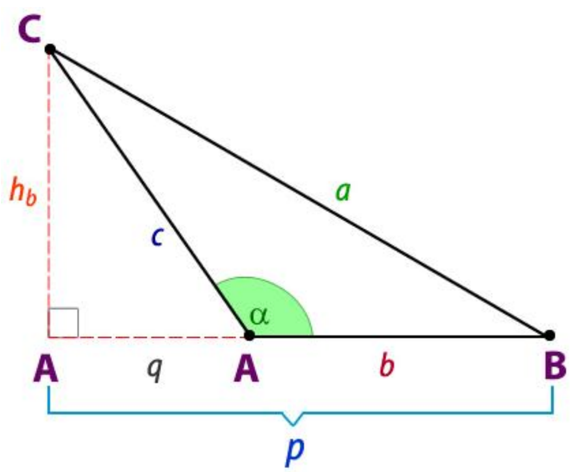
Teorema general de Pitágoras

a) En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la medida del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados menos el doble de la medida de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bq$$

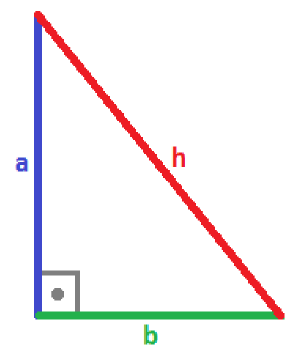
b) En un triángulo obtusángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados más el doble de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bq$$

De acuerdo al Teorema de Pitágoras: dado un triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* e hipotenusa *h* (el lado opuesto al ángulo recto). Entonces,

$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$$



Despejando,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

Recordemos que:

- El triángulo es **rectángulo** porque tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados ó π / 2 radianes.
- La **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto

Nota: *h* siempre es mayor que los dos catetos, es decir, $h > a$ y $h > b$.

El teorema de Pitágoras es uno de los resultados más conocidos de las matemáticas y también uno de los más antiguos. Existen cientos de demostraciones de este resultado.

Problema 1

Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 3cm y 4cm.

Problema 2

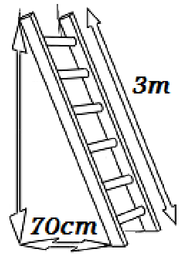
Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2cm y uno de sus lados mide 1cm, ¿cuánto mide el otro lado?

Problema 3

Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

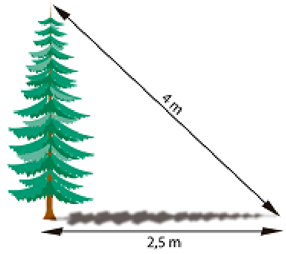
Problema 4

Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



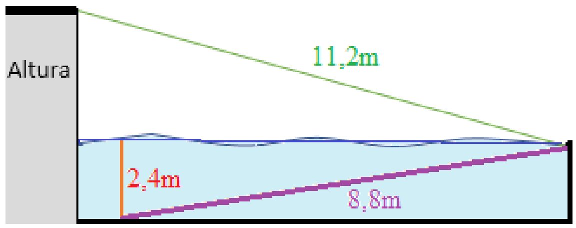
Problema 5

Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?



Problema 6

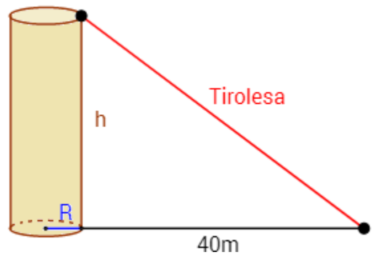
Un clavadista está entrenando en una piscina con una plataforma. Cuando realiza el salto, cae a una distancia de 1 metro de la plataforma sumergiéndose 2.4 metros bajo el agua. Para salir a la superficie, bucea hasta el final de la piscina siguiendo una línea transversal de 8.8 metros de longitud.



Si la longitud desde la parte superior de la plataforma al lugar en donde emerge del agua es de 11.2 metros, ¿cuál es la altura de la plataforma (desde el nivel del agua)?

Problema 7

Un parque de diversiones quiere construir una nueva atracción que consiste en una tirolesa que parte desde la base superior de una columna con forma cilíndrica. Si el radio de la columna es R=2metros y el área de su lateral es de 120 metros cuadrados, calcular la longitud del cable de la tirolesa para que alcance el suelo a 40 metros de distancia de la columna.



Tenemos un triángulo rectángulo de base 40m cuya hipotenusa coincide con la tirolesa. La altura de la columna, **h**, la podemos calcular a partir de su área lateral y su radio, R.

El área lateral del cilindro es la del rectángulo de altura **h** y cuya base es el diámetro de la base del cilindro, es decir, dos veces el radio.

Por tanto, el área del lateral de la columna es: **A = 2* R* h**

Resolución de triángulos Oblicuángulos

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no es recto ninguno de sus ángulos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras, el triángulo oblicuángulo se resuelve por leyes de senos y de cosenos, así como el que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados.

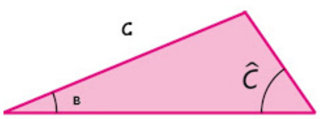
Casos de triángulos oblicuángulos

Existen cuatro casos de triángulos oblicuángulos:

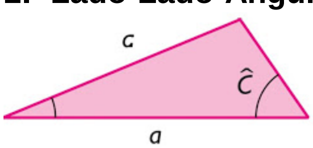
- El I y II se resuelven con Ley de Senos
- Los III y IV se resuelven con Ley de Cosenos

Suma de los ángulos de un triángulo	$A + B + C = 180^o$
Teorema del seno	$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$
Teorema del coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{Cos } A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{Cos } B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos } C$

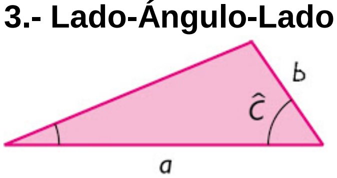
1.- Ángulo-Ángulo-Lado



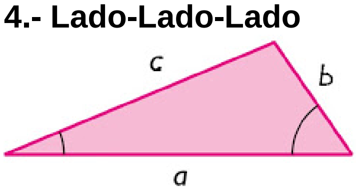
2.- Lado-Lado-Ángulo (Á L L)



3.- Lado-Ángulo-Lado

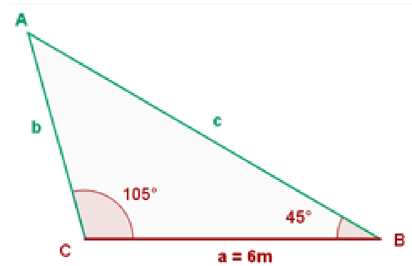


4.- Lado-Lado-Lado



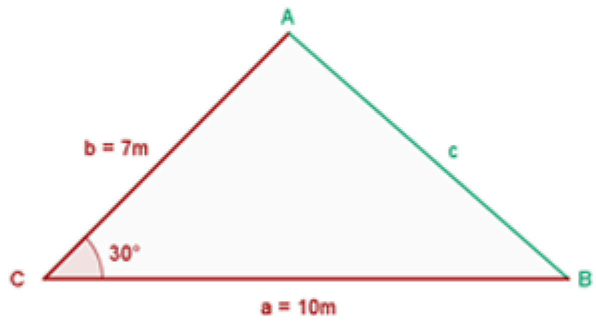
Ejercicio 1:

De acuerdo a la figura que se presenta calcule los elementos restantes:



Ejercicio 2:

De acuerdo a la figura que se presenta calcule los elementos restantes:



Ejercicio 3: Resuelve el triángulo de datos: $A = 60°$, $a = 8$ m y $b = 4$ m.

Ejercicio 4: Resuelve el triángulo de datos: $A = 30°$, $a = 3$ m y $b = 4$ m.

Ejercicio 5: Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo con los datos que se proporcionan a continuación.

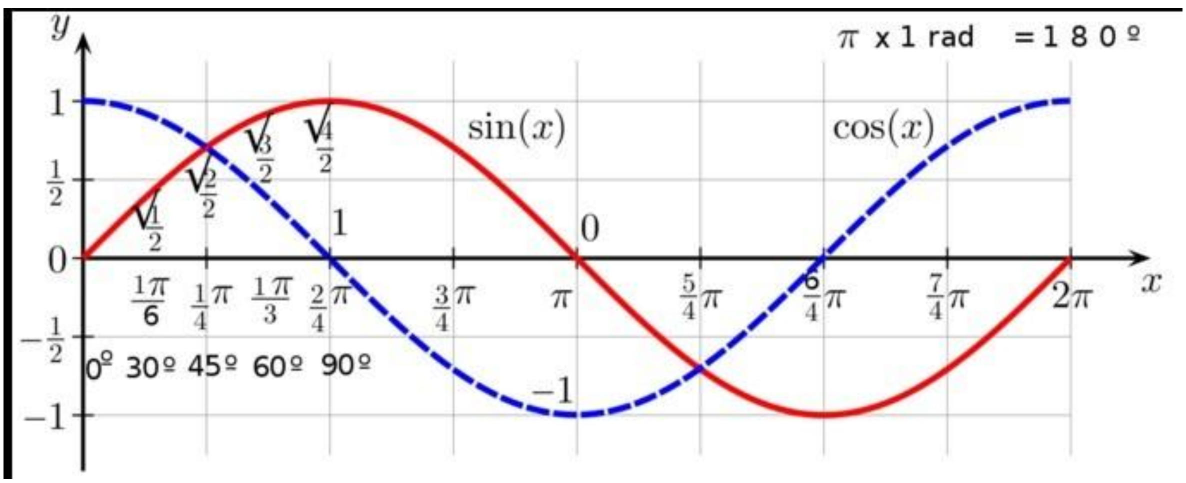
Lados	Ángulos
a = ?	A =22°
b = ?	B = ?
c = 80	C =130°

Ejercicio 6: Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo con los datos que se dan a continuación.

Datos:

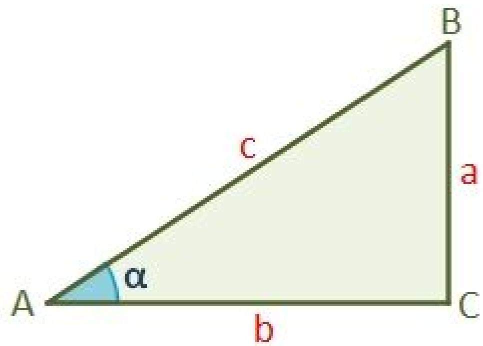
Lados	Ángulos
a = 8	A =?
b = 11.29	B =83°
c = ?	C =?

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las **funciones trigonométricas** *f* son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica.



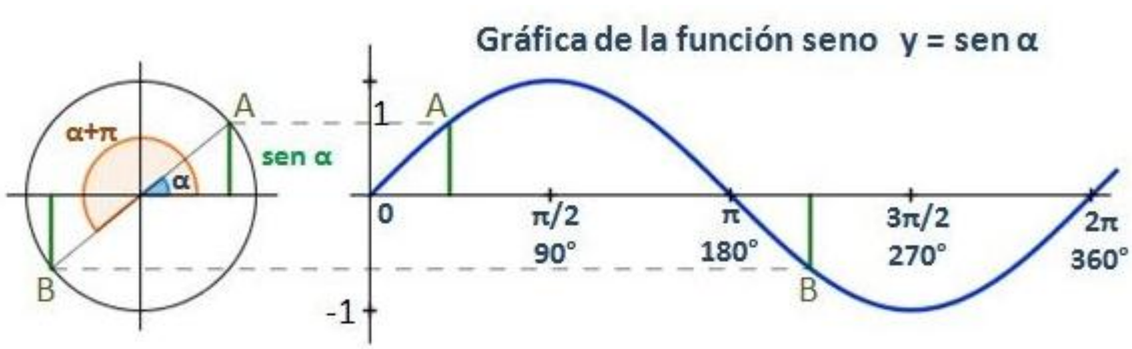
Sea un triángulo rectángulo, como el del gráfico presente, siendo los catetos los lados "a" y "b", y la hipotenusa el lado mayor (opuesto al ángulo recto) "c". Las relaciones entre los catetos y la hipotenusa se llaman *seno, coseno* y *tangente*, es decir:

Existen seis **funciones trigonométricas**:

SENO

El **seno** de un **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*). Su abreviatura son ***sen*** o ***sin*** (del latín *sinus*).

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

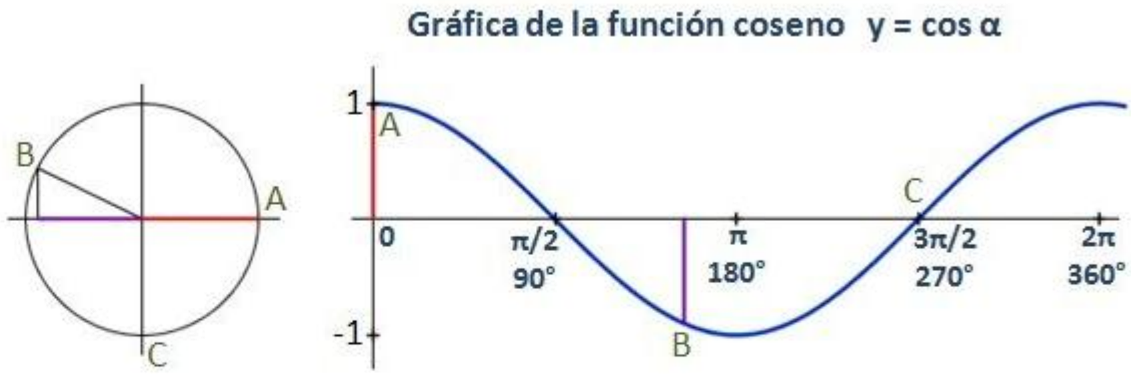


COSENO

El **coseno** de un **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*). Su abreviatura es ***cos*** (del latín *cosinus*).

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

La **gráfica** de la función coseno es:

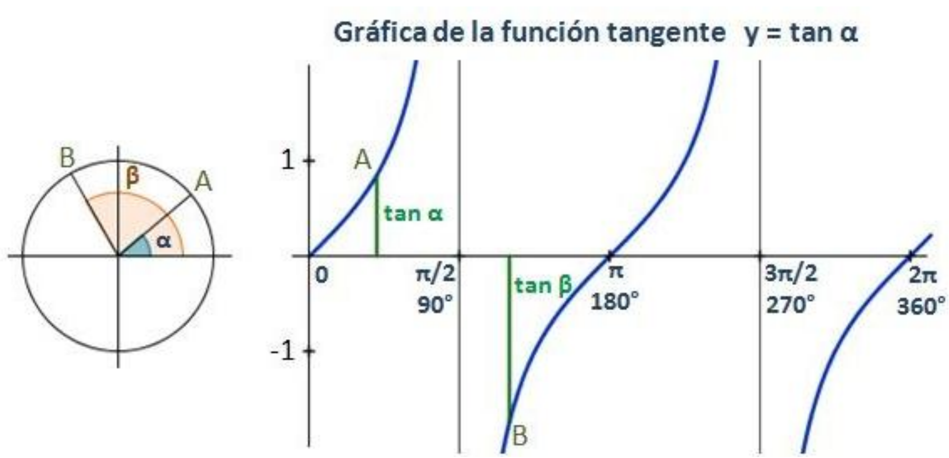


TANGENTE

La **tangente** de un **ángulo α** es la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*). Su abreviatura son ***tan*** o ***tg***.

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

La **gráfica** de la función tangente es:



COSECANTE

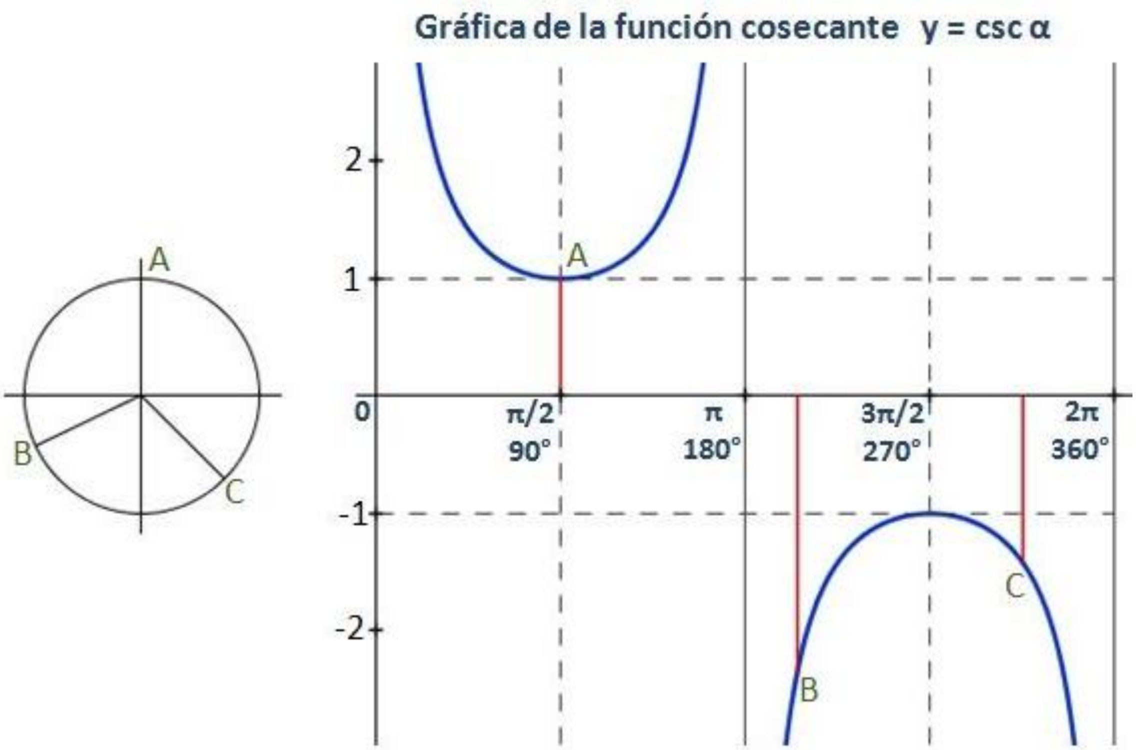
La **cosecante** es la razón trigonométrica recíproca del seno. Es el recíproco o el **inverso multiplicativo** del seno, es decir csc α · sen α=1.

La **cosecante** del **ángulo α** de un triángulo rectángulo se define como la **razón** entre la **hipotenusa** (*c*) y el **cateto opuesto** (*a*).

Su abreviatura es ***csc*** o ***cosec***.

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

La **gráfica** de la función cosecante es:



SECANTE

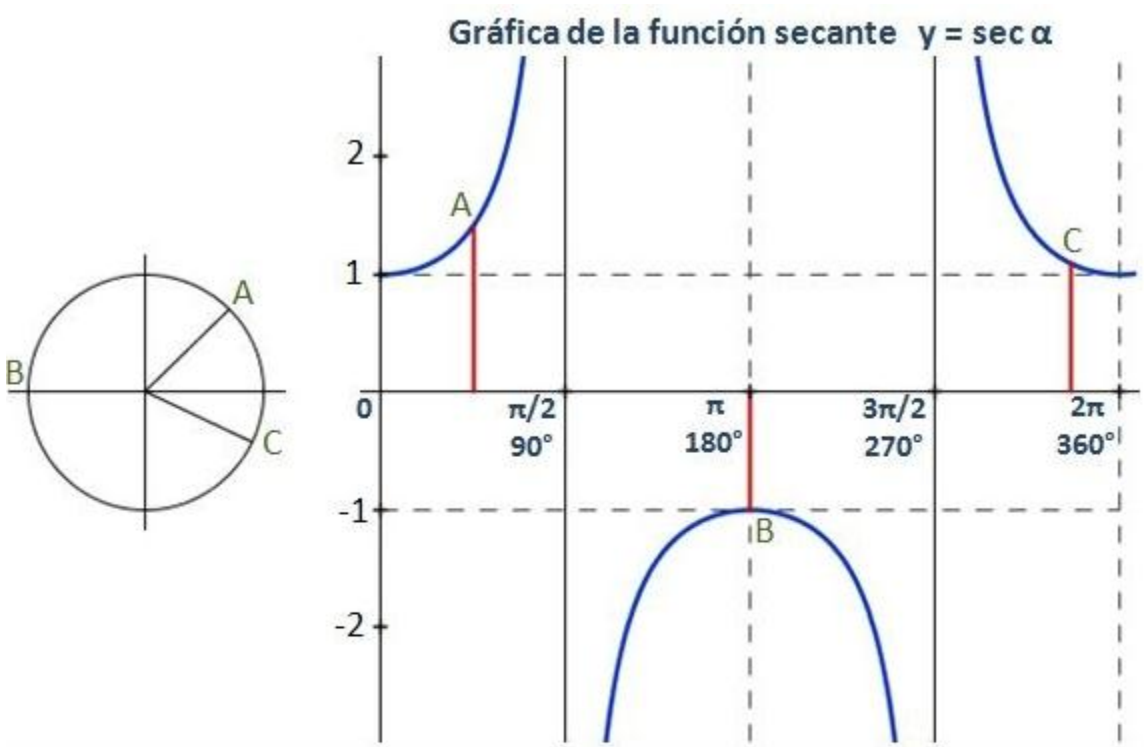
La **secante** es la razón trigonométrica recíproca del coseno. Es el recíproco o el **inverso multiplicativo** del coseno, es decir sec α · cos α=1.

La **secante** de un **ángulo α** de un triángulo rectángulo se define como la **razón** entre la **hipotenusa** (*c*) y el **cateto contiguo** o cateto adyacente (*b*).

Su abreviatura es ***sec***.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}$$

La **gráfica** de la función secante es:



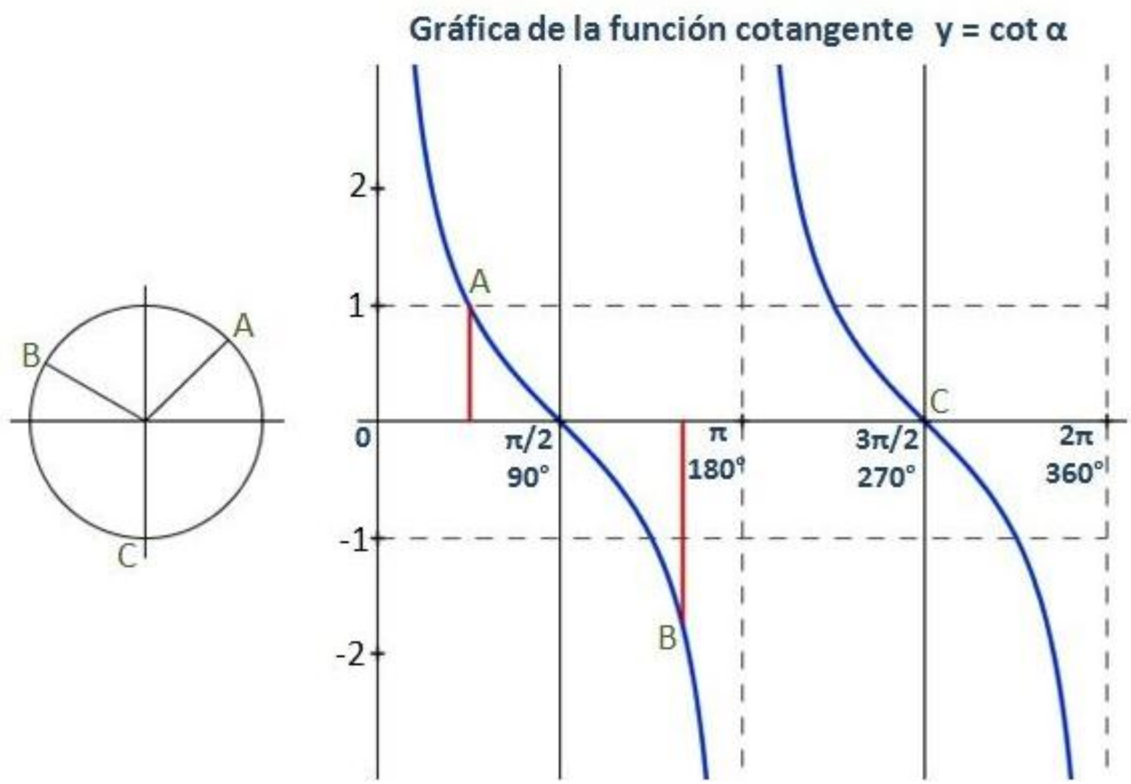
COTAGENTE

La **cotangente** es la razón trigonométrica recíproca de la tangente. Es el recíproco o el **inverso multiplicativo** de la tangente, es decir tan α · cot α=1.

La **cotangente** de un **ángulo α** de un triángulo rectángulo se define como la **razón** entre el **cateto contiguo** o cateto adyacente (*b*) y el **cateto opuesto** (*a*). Su abreviatura es ***cot***, ***cotg*** o ***cotan***

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

La **gráfica** de la función cotangente es:



Razones Trigonométricas inversas

Si conocemos el seno, el coseno o la tangente del ángulo α y queremos calcular el ángulo α, usamos las razones trigonométricas inversas:

- La inversa del seno es el **arcoseno**, escrita como arcsin:

$$\sin(\alpha) = a \rightarrow$$
$$\alpha = \arcsin(a)$$

En la calculadora es la tecla $\sin^{-1}$.

- La inversa del coseno es el **arcocoseno**, escrita como arccos:

$$\cos(\alpha) = a \rightarrow$$
$$\alpha = \arccos(a)$$

  En la calculadora es la tecla $\cos^{-1}$.

- La inversa de la tangente es la **arcotangente**, escrita como arctan:

$$\tan(\alpha) = a \rightarrow$$
$$\alpha = \arctan(a)$$

  En la calculadora es la tecla $\tan^{-1}$.

Problema 1:
(Con calculadora) Calcular los ángulos αα sabiendo cuánto valen su seno o su coseno:

a) $sin(\alpha) = 0.999390827$

b) $sin(\alpha) = 0.6691306064$

c) $sin(\alpha) = 0.7660444431$

d) $sin(\alpha) = 0.9743700648$

e) $cos(\alpha) = 0.8090169944$

f) $cos(\alpha) = 0.2588190451$

g) $cos(\alpha) = 0.9271838546$

h) $cos(\alpha) = 0.4067366431$

Problema 2:

Simplificar las siguientes expresiones:

- $sin(x) - 2(sin(x) - 3sin(2x))$
- $2 \cdot (cos(x) - cos(2x)) - (2cos(x) - cos(2x))$
- $2sin(x) - \frac{4sin(x) - cos(x)}{2}$

Problema 3:

Calcular el valor de x de cada figura utilizando las razones trigonométricas de acuerdo a las figuras que a continuación se muestran:

Figura 1:

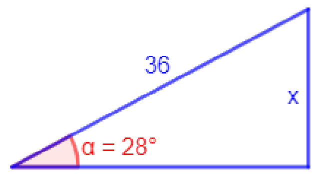
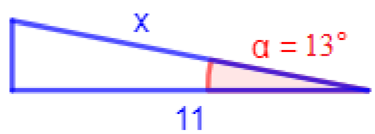


Figura 2:



Cont…Problema 3:

Calcular el valor de x de cada figura utilizando las razones trigonométricas de acuerdo a las figuras que a continuación se muestran:

Figura 3:

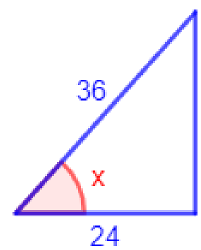
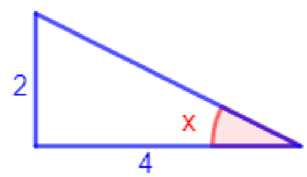


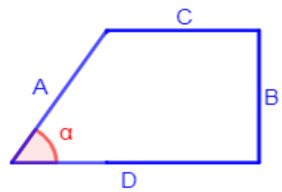
Figura 4:



Problema 4:

Desde un supermercado se observa el ático de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcular la distancia que hay desde el supermercado hasta la puerta del rascacielos.

Problema 5:
Calcular el perímetro del siguiente polígono:



donde

- $\alpha = 58°$
- $B = C$
- $A = 24.6m$

Problema 6:

Ramiro está volando su cometa y le gustaría saber qué altura alcanza. La sombra de la sombra de la cometa comienza a sus pies y termina a 6.7 metros y el ángulo que forma el cable con el suelo es de 39°. ¿A qué altura se encuentra la cometa?